Skaitīšanas uzdevumi

### Условие

В столовой предложено на выбор 6 блюд. Каждый день Вася берет некоторый набор блюд (возможно, не берет ни одного блюда), причем этот набор блюд должен быть отличен от всех наборов, которые он брал в предыдущие дни. Какое наибольшее количество дней Вася сможет питаться по таким правилам и какое количество блюд он в среднем при этом будет съедать за день?

### Подсказка

Каждому набору блюд можно сопоставить противоположный набор, состоящий в точности из тех блюд, которых нет в исходном наборе.

### Решение

   Количество дней равно, очевидно, количеству различных наборов из 6 блюд. Для каждого блюда есть две возможности – быть выбранным или невыбранным. Поэтому количество дней равно 26.   
   Каждому набору блюд можно сопоставить противоположный набор, состоящий в точности из тех блюд, которых нет в исходном наборе. Вместе в исходном и в противоположном наборе – 6 блюд, значит, в среднем приходится по 3 блюда на набор. Поскольку все 64 набора разбиваются на пары противоположных, то в среднем за эти 64 дня Вася съедал 3 блюда.

### Ответ

64 дня, в среднем 3 блюда в день.

1. Uslovie

 а) Сколькими способами Дима сможет покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски у него неограничено, а каждую елку он красит только в один цвет?   
   б) У Димы есть пять шариков: красный, зеленый, желтый, синий и золотой. Сколькими способами он сможет украсить ими пять елок, если на каждую требуется надеть ровно один шарик?   
   в) А если можно надевать несколько шариков на одну елку (и все шарики должны быть использованы)?

**Решение**

   а) Каждую из пяти елок можно покрасить в один из трех цветов, поэтому всего различных способов существует  3·3·3·3·3 = 35.   
   б) На первую елку можно надеть любой из пяти шариков, на вторую елку – любой из оставшихся четырех, и так далее; всего получаем   
 5·4·3·2·1 = 120 способов.   
   в) Каждый из шариков можно надеть на любую елку, поэтому в этом случае ответ – 55.

**Ответ**

а) 243;   б) 120;   в) 3125.

1. **Условие**

У людоеда в подвале томятся 25 пленников.   
   а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин? Порядок важен.   
   б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

**Решение**

   а) На завтрак людоед может предпочесть любого из 25 человек, на обед – любого из 24 оставшихся, а на ужин – кого-то из 23 оставшихся счастливчиков. Всего получаем  25·24·23 = 13800 способов.

   б) Заметим, что в предыдущем пункте каждую тройку пленников мы посчитали  3·2·1 = 6 раз. Поскольку теперь их порядок нам неважен, то ответом будет число  13800 : 6 = 2300.

### Условие

Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

### Ответ

16 = 24  раскрасок.

### Условие

Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее "Спортпрогноз"? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет).

### Ответ

313 способами.

1. **Условие**

На танцплощадке собрались *N* юношей и *N* девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

**Подсказка**

"Зафиксируем" девушек. Тогда разбиение на пары определяется перестановкой юношей.

**Ответ**

*N*! способами.

1. **Условие**

Cколько существует различных семизначных телефонных номеров (cчитается, что номер начинаться с нуля не может)?

**Решение 1**

Первую цифру можно выбрать 9 способами, а каждую из шести остальных – 10 способами. Итого, 9·106 способов.

**Решение 2**

Таких номеров столько же, сколько семизначных чисел. Наибольшее семизначное число – 9999999, наибольшее шестизначное – 999999. Поэтому всего семизначных чисел  9999999 – 999999 = 9000000.

**Ответ**

9·106 номеров.

1. **Условие**

Сколькими способами можно переставить числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

**Подсказка**

Где может стоять число 1?

**Решение**

   Рядом с числом 1 может стоять только 2, поэтому 1 стоит с краю. Допустим, что 1 стоит в начале. Тогда следующее число – 2, следующее – 3 (других чисел рядом с 2 быть не может), следующее – 4 и т. д. Получаем расстановку 1, 2, ..., 99, 100.  
   Если же 1 стоит в конце, то аналогично однозначно восстанавливается расстановка 100, 99, ..., 2, 1.

**Ответ**

Двумя способами.

### Условие

Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

### Подсказка

Учтите, что 0 не может стоять на первом месте.

### Ответ

9·55 чисел.

1. **Условие**

Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

**Подсказка**

Количество *n*-значных чисел с таким свойством равно 9*n*: на первом месте может стоять любая из 9 цифр (все, кроме 0), на втором – тоже (все, кроме первой) и т. д.

**Ответ**

http://problems.ru/show_document.php?id=1707622   число.

1. **Условие**

Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?

**Решение**

**Первый способ.** Каждому такому числу однозначно соответствует выбор 6 цифр из числа 9876543210.

**Второй способ.** Чтобы получить число с "убывающими цифрами" нужно из числа 9876543210 вычеркнуть любые 4 цифры.

**Ответ**

http://problems.ru/show_document.php?id=1704545  чисел.

1. **Условие**

Дан шестизначный номер телефона. Из скольких семизначных номеров его можно получить вычеркиванием одной цифры?

**Подсказка**

Сколько способов вставить еще одну цифру в номер телефона?

**Решение**

Пусть *ABCDEF* – шестизначный номер телефона. Подсчитаем, сколько семизначных номеров можно получить из него добавлением одной цифры. Перед номером можно приписать любую из 10 цифр, однако номер, получающийся приписыванием цифры *A*, можно также получить, вставив цифру *A* между *A* и *B*. Этот случай мы учтем позже. Итак, пока мы получили 9 номеров. Аналогично можно получить 9 номеров, вставляя цифру между *A* и *B* (число, получаемое вставлением туда цифры *B*, получим на следующем шаге) между *B* и *C* и т. д. Наконец, 10 номеров можно получить, приписывая цифру в конце исходного номера. Таким образом, получаем  6·9 + 10 = 64 номера.

**Ответ**

Из 64 номеров.

1. **Условие**

Для зашифровки телеграфных сообщений требуется разбить всевозможные десятизначные "слова" — наборы из десяти точек и тире — на две группы так, чтобы каждые два слова одной группы отличались не менее чем в трёх разрядах. Указать способ такого разбиения или доказать, что его не существует.

Также доступны документы в формате [TeX](http://problems.ru/show_document.php?id=1060972) 

**Решение**

Рассмотрим все слова, начинающиеся с одной и той же последовательности из восьми точек и тире. Таких слов четыре, и все они должны быть в разных группах. Но групп только две. Значит, требуемое разбиение невозможно.

1. **Условие**

В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

**Решение**

Очевидно это те дни, у которых число может быть номером месяца, то есть принимает значение от 1 до 12. Таких дней  12·12 = 144.  Но те дни, у которых число совпадает с номером месяца, понимаются однозначно. Поэтому искомых дней  144 − 12 = 132.

Kāpnītes

### Условие

На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

### Ответ

5 + 5·4 + 5·4·3 + 2·5! = 325 способами.

1. **Условие**

Найдите число всех диаграмм Юнга с весом *s*, если   
а)  *s* = 4;   б)  *s* = 5;   в)  *s* = 6;   г)  *s* = 7.   
Определение диаграмм Юнга смотри в [справочнике](http://problems.ru/thes.php?letter=4#diagramma_junga).

**Решение**

Достаточно перечислить все способы разбить указанные веса в сумму натуральных слагаемых, расположенных в неубывающем порядке.

а)  4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.

б)  5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

в)  6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 = = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

г)  7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 5 + 1 + 1 = 4 + 3 = 4 + 2 + 1 = 4 + 1 + 1 + 1 = = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 =   
     = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

**Ответ**

а) 4;  б) 7;  в) 11;  г) 14 диаграмм.

Staircase Walk

N x N

N x M

N x M x K

Kāda ir varbūtība satikties, randomā ejot no vien M x N stūra uz otru (un otrādi).

The number of staircase walks on a grid with m horizontal lines and n vertical lines is given by

|  |
| --- |
| (m+n; m)=((m+n)!)/(m!n!) |

Squarefree numbers

Cik ir squarefree skaitļu intervālā no 1-100 ? 1-1000?

Ģeometrija?

1. **Условие**

*Автор:*[*Дориченко С.А.*](http://problems.ru/view_by_author.php?author=376)

Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998?   
(Прямоугольники *a*×*b* и *b*×*a* считаются одинаковыми.)

**Подсказка**

Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998.

**Решение**

Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, длина *меньшей* стороны может принимать значения от 1 до 499. Если периметр прямоугольника равен 1998, то сумма длин его соседних сторон равна 999, а длина *меньшей*стороны может принимать те же значения: от 1 до 499. То есть в обоих случаях прямоугольников поровну, а именно, 499.

**Ответ**

Поровну.

1. **Условие**

*Автор:*[*Семенова М.*](http://problems.ru/view_by_author.php?author=448)

На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

**Подсказка**

Решите задачу для двух меридианов и одной параллели.

**Решение**

Меридианы делят глобус на 24 части (дольки), а параллели делят каждую дольку на  17 + 1 = 18 частей. Всего  18·24 = 432  части.

**Ответ**

На 432 части.

1. **Условие**

Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с *m* горизонталями и *n* вертикалями, которые содержат клетку с координатами (*p*, *q*).

**Подсказка**

Каждый прямоугольник однозначно определяется своим левым нижним и правым верхним углами.

**Ответ**

http://problems.ru/show_document.php?id=90144.?

Krāsošanas uzdevumi

1. **Условие**

В городе Васюки у всех семей были отдельные дома. В один прекрасный день каждая семья переехала в дом, который раньше занимала другая семья. В связи с этим было решено покрасить все дома в красный, синий или зелёный цвет, причём так, чтобы для каждой семьи цвет нового и старого домов не совпадал. Можно ли это сделать?

Также доступны документы в формате [TeX](http://problems.ru/show_document.php?id=1291742) 

**Решение**

Все семьи города можно разбить на замкнутые цепочки, в которых после каждой семьи будет стоять та, в дом которой семья переехала (может быть, будет всего одна цепочка). В цепочках из чётного числа семей, будем красить дома попеременно в синий и зелёный цвета — тогда каждая семья переедет из синего дома в зелёный или наоборот. А в тех цепочках, где число семей нечётно, покрасим один дом в красный цвет, а оставшееся чётное число домов — попеременно в синий и зелёный. Тогда все дома будут окрашены с выполнением требований задачи.